

Seri bahan kuliah Algeo #5 - 2023

Sistem Persamaan Linier (SPL)

Pokok bahasan: Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Bahan Kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

**Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB**

Metode Eliminasi Gauss-Jordan

- Merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss
- Operasi baris elementer (OBE) diterapkan pada matriks *augmented* sehingga menghasilkan matriks eselon baris tereduksi.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \sim_{\text{OBE}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

- Tidak diperlukan lagi substitusi secara mundur untuk memperoleh nilai-nilai variabel. Nilai variabel langsung diperoleh dari matriks *augmented* akhir (jika solusinya unik).

- Metode eliminasi Gauss-Jordan terdiri dari dua fase:
 1. Fase maju (*forward phase*) atau fase eliminasi Gauss
 - Menghasilkan nilai-nilai 0 di bawah 1 utama

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \text{OBE} \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Fase mundur (*backward phase*)

- Menghasilkan nilai-nilai 0 di atas satu utama

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{R1} - (3/2)\text{R2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/4 & -11/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{R1} + (5/4)\text{R3} \\ \text{R2} - (1/2)\text{R3} \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kedua fase dapat dilakukan secara bersamaan atau sekuensial



Matriks eselon baris tereduksi

Dari matriks *augmented* terakhir, diperoleh $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

Contoh 1: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9$$

$$x_1 - 2x_3 + 7x_4 = 11$$

$$3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 10$$

Matriks eselon baris tereduksi

Penyelesaian:

Fase maju:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R2 - 2R1 \\ R3 - 3R1 \\ R4 - 2R1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 7 & -10 & -13 \\ 0 & -3 & 7 & -16 & -25 \\ 0 & 1 & 8 & -10 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)*R2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & -3 & 7 & -16 & -25 \\ 0 & 1 & 8 & -10 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R3 + 3R2 \\ R4 - R2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & 15 & -20 & -25 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1/14)*R3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 15 & -20 & -25 \end{bmatrix} \xrightarrow{R4 - 15R3}$$

$$\dots \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & -5 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1/5)*R4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Fase mundur:

Matriks eselon baris

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R1 + 2R3 \\ R2 + 7R3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} & 5 & 9 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R1 - 5R4 \\ R2 - 3R4 \\ R3 + R4 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks eselon baris tereduksi

Dari matriks *augmented* terakhir diperoleh solusi SPL sbb:

$$x_1 = -1;$$

$$x_2 = 0;$$

$$x_3 = 1;$$

$$x_4 = 2$$

Contoh 2: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2$$

$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1$$

$$3x_1 - 3x_4 = -3$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ R2 - 2R1 \\ R3 + R1 \\ R4 - 3R1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ R2 / 3 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ R3 - R2 \\ R4 - 3R2 \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ R1 + R2 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Persamaan yang diperoleh:} \\ x_1 - x_4 = -1 \quad (\text{i}) \\ x_2 - 2x_3 = 0 \quad (\text{ii}) \\ \end{array}$$

Matriks eselon baris tereduksi

Matriks *augmented* terakhir sudah berbentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan yang diperoleh:

$$x_1 - x_4 = -1 \quad (\text{i})$$

$$x_2 - 2x_3 = 0 \quad (\text{ii})$$

Dari (ii) diperoleh:

$$x_2 = 2x_3$$

Dari (i) diperoleh:

$$x_1 = x_4 - 1$$

Misalkan $x_3 = r$ dan $x_4 = s$, maka solusi SPL tersebut adalah:

$$x_1 = s - 1, x_2 = 2r, x_3 = r, x_4 = s, \text{ yang dalam hal ini } r, s \in \mathbb{R}$$

Contoh 3: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} & -2x_3 + 7x_5 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 &= 28 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 8x_4 - 5x_5 &= -1 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R1 \leftrightarrow R2 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R1/2 \\ \sim \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R3 - 2R1 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R2/(-2) \\ \sim \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \xrightarrow{R3 - 5R2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R3/(1/2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R1 - 6R3 \\ R2 + 7/2 R3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1 + 5R2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks eselon baris tereduksi

Dari matriks augmented yang terakhir diperoleh persamaan:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 7 \quad (\text{i})$$

$$x_3 = 1 \quad (\text{ii})$$

$$x_5 = 2 \quad (\text{iii})$$

Misalkan $x_2 = s$ dan $x_4 = t$, maka solusi SPL adalah:

$$x_1 = 7 - 2s - 3t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = t, \quad x_5 = 2, \quad s \text{ dan } t \in \mathbb{R}$$

Sistem Persamaan Linier Homogen

- Sistem persamaan linier homogen berbentuk:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

- $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ selalu menjadi solusi SPL homogen (baik diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss maupun Gauss-Jordan). Jika ini merupakan satu-satunya solusi, solusi nol ini disebut **solusi trivial**.
- Jika ada solusi lain selain $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, maka solusi tersebut dinamakan **solusi non-trivial**.

Contoh 4(a): Selesaikan SPL homogen dengan metode eliminasi Gauss:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\x_1 + 8x_3 &= 0\end{aligned}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3 * (-1/2) \\ R_3 - R_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_3/2 = 0 \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow x_1 = -2x_2 - 3x_3 = 0 - 0 = 0 \\ \rightarrow x_2 = 0 + 2x_3 = 0 + 0 = 0 \\ \rightarrow x_3 = 0 \end{array}$$

Solusi: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0 \rightarrow$ **solusi trivial**

Contoh 4(b): Selesaikan SPL homogen dengan matriks augmented sebagai berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R3 - 2R1 \\ R4 + 2R1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R2/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R3 - 3R2 \\ R4 - R2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R1 + 3R3 \\ R2 - 2R3 \\ R4 + 10R3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matriks *augmented* yang terakhir sudah dalam bentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh persamaan-persamaan berikut:

$$x_1 - x_3 = 0 \rightarrow x_1 = x_3$$

$$x_2 + x_3 = 0 \rightarrow x_2 = -x_3$$

$$x_4 = 0$$

Misalkan $x_3 = t$, maka solusi SPL adalah $x_1 = t$, $x_2 = -t$, $x_3 = t$, $x_4 = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Perhatikan bahwa untuk $t = 0$, maka $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Namun ini bukan satu-satunya solusi. Untuk t selain 0 terdapat banyak kemungkinan solusi SPL.

Sehingga dikatakan SPL homogen ini memiliki **solusi non-trivial**.

- Di dalam sebuah SPL sembarang $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sebuah SPL disebut **konsisten** jika ia mempunyai paling sedikit satu solusi (baik solusi tunggal atau solusi banyak).
- Sebaliknya, sebuah SPL disebut **inkonsisten** jika ia tidak memiliki solusi.
- SPL homogen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ selalu konsisten karena ia sedikitnya mengandung solusi trivial.
- Jadi, di dalam SPL homogen berlaku salah satu sifat sebagai berikut:
 1. SPL homogen memiliki solusi trivial
 2. SPL homogen memiliki tak berhingga solusi

Menghitung Matriks Balikan dengan Eliminasi Gauss-Jordan

- Misalkan A adalah matriks persegi berukuran $n \times n$. Balikan (*inverse*) matriks A adalah A^{-1} sedemikian sehingga $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
- Metode eliminasi Gauss-Jordan (G-J) dapat digunakan untuk menghitung matriks balikan.
- Untuk matriks A yang berukuran $n \times n$, matriks balikannya, yaitu A^{-1} , dicari dengan cara berikut:

$$[A|I] \xrightarrow{\text{G-J}} [I|A^{-1}]$$

yang dalam hal ini I adalah matriks identitas berukuran $n \times n$.

- Metode eliminasi Gauss-Jordan diterapkan secara simultan untuk A maupun I .

Contoh 5: Tentukan balikan dari matriks A berikut: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R2 - 2R1 \\ \\ R3 - R1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ R3 + 2R2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} R3/(-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ R1 - 2R2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R1 - 9R3 \\ \\ R2 + 3R3 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) = (I|A^{-1})$$

Jadi, balikan matriks A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Periksa bahwa

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Contoh 6: Tentukan balikan dari matriks A berikut: $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R2 - 2R1 \\ \\ R3 + R1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R2/(-8) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9/8 & 2/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R3 - 8R2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9/8 & 2/8 & -1/8 & 0 \\ \boxed{0 & 0 & 0} & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Ada baris bernilai 0

Karena ada baris yang bernilai 0, maka A tidak memiliki balikan.

- Jika A tidak memiliki balikan, maka A dinamakan **matriks singular**.
- Pada SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, jika A tidak mempunyai balikan, maka $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak memiliki solusi yang tunggal (unik).
- Namun, jika A mempunyai balikan, maka SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ memiliki solusi unik.
- Pada SPL homogen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, SPL hanya memiliki solusi trivial jika A memiliki balikan. Jika A tidak memiliki balikan, maka SPL memiliki solusi non-trivial.

Contoh 7: SPL homogen berikut memiliki solusi trivial (artinya solusinya hanyalah $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$).

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\x_1 + 8x_3 &= 0\end{aligned}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriks A SPL di atas sudah dihitung pada Contoh 5 memiliki balikan.

Tetapi SPL homogen berikut memiliki solusi non-trivial (artinya, ada solusi yang lain selain $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$)

$$\begin{aligned}x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 0 \\2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\-x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0\end{aligned}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad A^{-1} \text{ tidak ada}$$

Matriks A SPL di atas sudah dihitung pada Contoh 6 tidak memiliki balikan.

Penyelesaian SPL dengan menggunakan matriks balikan

- Tinjau SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Kalikan kedua ruas persamaan dengan A^{-1}

$$(A^{-1})A\mathbf{x} = (A^{-1})\mathbf{b}$$

$$I\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{karena } A^{-1}A = I)$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{karena } I\mathbf{x} = \mathbf{x})$$

- Jadi, solusi SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

Contoh 8. Selesaikan SPL berikut

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$$

$$x_1 + 8x_3 = 1$$

Penyelesaian:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ sudah dihitung balikkannya pada Contoh 5 yaitu } A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

maka

$$\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Metode penyelesaian SPL dengan menggunakan matriks balikan sangat berguna untuk menyelesaikan sejumlah SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan A yang sama tetapi dengan \mathbf{b} yang berbeda-beda, seperti contoh ini:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$$

$$x_1 + 8x_3 = 1$$

(i)

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 + 8x_3 = -2$$

(ii)

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12$$

$$x_1 + 8x_3 = 5$$

(iii)

- Tiga buah SPL di atas memiliki A yang sama namun \mathbf{b} yang berbeda-beda. Cukup sekali mencari A^{-1} maka solusi setiap SPL dapat dihitung dengan cara mengalikan A^{-1} dengan setiap \mathbf{b} , yaitu $\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b}$.

Latihan

1. Selesaikan SPL berikut dengan metode eliminasi Gauss-Jordan

(a)

$$\begin{aligned}x - y + 2z - w &= -1 \\2x + y - 2z - 2w &= -2 \\-x + 2y - 4z + w &= 1 \\3x &\quad - 3w = -3\end{aligned}$$

(b) SPL dalam bentuk matriks augmented

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array} \right]$$

2. Tentukan balikan matriks berikut (jika ada)

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

(c)
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(d)
$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

Catatan: k_1 , k_2 , k_3 , dan k_4 tidak sama dengan nol